

# Равномерное приближение периодических функций тригонометрическими суммами специального вида<sup>1</sup>

А.С. Сердюк, Е.Ю. Овсий  
Институт математики НАН Украины, Киев

## Аннотация

В работе изучаются аппроксимационные свойства тригонометрических сумм  $U_{n,p}^\psi$  специального вида на классах  $(\psi, \beta)$ -дифференцируемых (в смысле Степанца) периодических функций  $C_{\beta,\infty}^\psi$ . Вследствие согласованности между параметрами аппроксимационных сумм и приближаемых классов в достаточно общей ситуации удастся найти решение соответствующей задачи Колмогорова–Никольского. Показано, что в ряде важных случаев рассматриваемые суммы на классах  $C_{\beta,\infty}^\psi$  обеспечивают более высокий порядок приближения в метрике пространства  $C$  по сравнению с суммами Фурье, Зигмунда и Валле Пуссена. Указан диапазон параметров, в пределах которого суммы  $U_{n,p}^\psi$  доставляют порядок наилучшего равномерного приближения классов  $C_{\beta,\infty}^\psi$ .

## 1 Введение и постановка задачи

Пусть  $C$  — пространство непрерывных  $2\pi$ -периодических функций  $f$ , в котором норма определяется формулой  $\|f\|_C = \max_x |f(x)|$ .

Рассмотрим класс  $C_{\beta,\infty}^\psi$  [10] непрерывных  $2\pi$ -периодических функций  $f \in C$ , для которых при  $\beta \in \mathbb{R}$  и заданной последовательности  $\psi(k)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) действительных чисел, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left( a_k(f) \cos \left( kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + b_k \sin \left( kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right)$$

является рядом Фурье некоторой функции  $\varphi \in S_\infty$ , где

$$S_\infty = \{ \varphi : \operatorname{ess\,sup}_t |\varphi(t)| \leq 1 \}.$$

Функцию  $\varphi$  принято называть  $(\psi, \beta)$ -производной функции  $f$  и обозначать через  $f_\beta^\psi$ . При  $\psi(k) = k^{-r}$ ,  $r > 0$ , класс  $C_{\beta,\infty}^\psi$  совпадает с классом Вейля-Надя  $W_\beta^r$ , а при  $\beta = r$  — с классом Вейля  $W_r^r$ . В случае натуральных  $r$  и  $\beta = r$ , класс  $C_{\beta,\infty}^\psi$  является классом  $W^r$  периодических функций, чьи  $r$ -е производные по модулю почти всюду не превышают единицы. Если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^r \psi(k) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

<sup>1</sup>Работа частично поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект № GP/Ф36/068)

то класс  $C_{\beta,\infty}^\psi$  состоит (см. [11, Гл. 1, Разд. 8]) из бесконечно дифференцируемых функций. Примером последовательности  $\psi(k)$ , удовлетворяющей условию (1) является последовательность  $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $r > 0$ . В этом случае классы  $C_{\beta,\infty}^\psi$  будем обозначать через  $C_{\beta,\infty}^{\alpha,r}$ . Если  $\psi(k)$  удовлетворяет условию

$$|\psi(k)| \leq K e^{-\alpha k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \alpha > 0, \quad (2)$$

то  $C_{\beta,\infty}^\psi$  состоит из аналитических функций, регулярно продолжающихся в полосу  $|\operatorname{Im} z| < \alpha$  комплексной плоскости.

Следуя работе [16, с. 147], обозначим через  $\mathfrak{M}$  множество всех положительных, выпуклых вниз функций  $\psi(t)$ ,  $t \geq 1$ , удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$$

и поставим в соответствие каждой  $\psi \in \mathfrak{M}$  характеристику вида

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \quad t \geq 1, \quad (3)$$

где  $\psi^{-1}(\cdot)$  — функция, обратная к  $\psi(\cdot)$ . При помощи характеристики  $\eta(t)$  выделим из  $\mathfrak{M}$  подмножество  $F$  следующим образом:

$$F = \{\psi \in \mathfrak{M} : \eta'(\psi; t) \leq K, \quad \forall t \geq 1\}.$$

Как показано в работе [16, с. 153], в  $F$  входят все функции  $\psi \in \mathfrak{M}$ , для которых

$$0 < C_1 \leq \frac{t}{T(t)} \leq C_2, \quad \forall t \geq 1, \quad C_1, C_2 = \text{const}, \quad (4)$$

где  $T(t) = T(\psi; t) = \eta(\psi; t) - t$ . Множество таких функций обозначают через  $\mathfrak{M}_C$ . Величина  $T(t)$  имеет простую геометрическую интерпретацию, она равна длине промежутка, на котором значение функции  $\psi(t)$  уменьшается ровно в два раза, в связи с этим, величину  $T(t)$  естественно назвать периодом полураспада функции  $\psi$ . Примерами  $\psi(\cdot)$ , принадлежащих  $\mathfrak{M}_C$ , могут служить, например, функции вида  $\psi_1(t) = t^{-r}$ ,  $r > 0$ ,  $\psi_2(t) = \frac{1}{t^r \ln(t+\beta)}$ ,  $r > 0$ ,  $\beta \geq 1$  и другие. Множество  $F$  включает также (см. [16, с. 153]) подмножество  $\mathfrak{M}_\infty^+$  всех функций  $\psi \in \mathfrak{M}$ , для которых характеристика

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad t \geq 1,$$

именуемая модулем полураспада, монотонно стремиться к бесконечности при  $t \rightarrow \infty$ .

Для  $\psi_3(t) = e^{-\alpha t^r}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $r > 0$ ,  $\eta(\psi_3; t) = t \left( \frac{\ln 2}{\alpha t^r} + 1 \right)^{1/r}$  и тогда при  $t \rightarrow \infty$

$$\mu(\psi_3; t) = \frac{t}{\eta(\psi_3; t) - t} = \frac{1}{\left( \frac{\ln 2}{\alpha t^r} + 1 \right)^{1/r} - 1} \uparrow \infty.$$

Таким образом  $\psi_3 \in \mathfrak{M}_\infty^+ \subset F$ . Следовательно, среди функций  $\psi$ , принадлежащих множеству  $F$ , находятся функции, имеющие степенную скорость стремления к нулю,

а также те, которые стремятся к нулю быстрее любой степенной функции. Пример функции  $\psi_4(t) = \frac{1}{\ln(t+1)}$ , для которой  $\eta(\psi_4; t) = (t+1)^2 - 1$ , а значит  $\eta'(\psi_4; t) = 2(t+1)$ , показывает, что множество  $F$  может не содержать функций, стремящихся к нулю медленнее любой степенной функции.

В дальнейшем, не уменьшая общности, будем считать, что последовательность  $\psi(k)$ , задающая класс  $C_{\beta, \infty}^\psi$ , является сужением на множестве натуральных чисел  $\mathbb{N}$  некоторой функции  $\psi(t)$ ,  $t \geq 1$ , из множества  $F$ .

Рассмотрим для произвольной функции  $f \in C$  сумму вида

$$U_{n,p}^\varphi(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{n,p}(k) A_k(f; x), \quad (5)$$

где

$$\lambda_{n,p}(k) = \lambda_{n,p}(k; \varphi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n-p, \\ 1 - \frac{\varphi(k)}{\varphi(n)}, & n-p+1 \leq k \leq n-1, \end{cases}$$

$\varphi(k)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) — произвольная монотонно возрастающая к бесконечности последовательность действительных чисел  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \in [1, n]$ ,

$$A_k(f; x) := a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx,$$

$$A_0(f; x) := \frac{a_0(f)}{2}$$

и  $a_0(f)$ ,  $a_k(f)$  и  $b_k(f)$  — коэффициенты Фурье функции  $f$ .

Суммы  $U_{n,p}^\varphi(f; x)$  при определенном выборе параметров  $p$  и  $\varphi(k)$  совпадают с такими классическими суммами, как суммы Зигмунда [19] (при  $p = n$  и  $\varphi(k) = k^s$ ,  $s > 0$ )

$$Z_n^s(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k^s}{n^s}\right) A_k(f; x), \quad s > 0,$$

суммы Фейера [3] (при  $p = n$  и  $\varphi(k) = k$ )

$$\sigma_{n-1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) A_k(f; x),$$

суммы Валле Пуссена [18] (при  $p \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq n$  и  $\varphi(k) = k - n + p$ )

$$V_{n,p}(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{n,p}(k) A_k(f; x),$$

где

$$\lambda_{n,p}(k) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n-p, \\ 1 - \frac{k-n+p}{p}, & n-p+1 \leq k \leq n-1, \end{cases}$$

суммы Фурье (при  $p = 1$ )

$$S_{n-1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(f; x).$$

При  $p = n$  суммы  $U_{n,p}^\varphi(f; x)$  совпадают с так называемыми обобщенными суммами Зигмунда [1] (см., также, [4, 8])

$$Z_n^\varphi(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\varphi(k)}{\varphi(n)}\right) A_k(f; x),$$

где  $\varphi(k)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) — произвольная монотонно возрастающая к бесконечности последовательность действительных чисел.

Целью данной работы является изучение асимптотического поведения при  $n \rightarrow \infty$  величины

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; U_{n,p}^\psi) = \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^\psi} \|f(\cdot) - U_{n,p}^\psi(f; \cdot)\|_C, \quad \psi \in F, \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (6)$$

где  $U_{n,p}^\psi(f; \cdot)$  — суммы  $U_{n,p}^\varphi(f; \cdot)$  вида (5) при  $\varphi(k) = \frac{k-n+p}{\psi(k)}$ . Отметим, что данная тематика для сумм Фурье, Валле Пуссена и Зигмунда на различных функциональных классах имеет большую историю, связанную с именами А.Н. Колмогорова, С.М. Никольского, А.Ф. Тимана, В.К. Дзядыка, С.Б. Стечкина, Н.П. Корнейчука, А.В. Ефимова, С.А. Теляковского, А.И. Степанца, В.П. Моторного, Р.М. Тригуба, В.И. Рукасова и многих других. Детально с историей данного вопроса можно ознакомиться, в частности, по работам [12, 13, 14] и [15].

Если для величины (6) получено асимптотическое равенство, то есть равенство вида

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; U_{n,p}^\psi) = \nu(n) + o(1)\nu(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $\nu(n) = \nu(n, p, \psi, \beta)$  некая конкретная последовательность, то следуя А.И. Степанцу [10] будем говорить, что для сумм  $U_{n,p}^\psi(f; x)$  найдено решение задачи Колмогорова–Никольского на классе  $C_{\beta,\infty}^\psi$ .

Перейдем к изложению основных результатов.

## 2 Основные результаты

Имеют место следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $\psi \in F$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $p \leq n$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; U_{n,p}^\psi) = \psi(n) \left( \frac{4}{\pi^2} A_{n,p}^\psi + O(1) \right), \quad (7)$$

где

$$A_{n,p}^\psi = \begin{cases} \ln p, & \text{если } T(n) \leq 1, \\ \ln \frac{p}{T(n)}, & \text{если } 1 \leq T(n) \leq p, \\ \ln \frac{T(n)}{p}, & \text{если } T(n) \geq p, \end{cases} \quad (8)$$

$T(t) = \eta(\psi; t) - t$ ,  $\eta(\psi; n) = \psi^{-1}(\frac{1}{2}\psi(n))$ ,  $O(1)$  — величина, равномерно ограниченная по  $\beta$ ,  $n$  и  $p$ .

Как показано в работе [16, с. 508], если  $\psi \in F$  и  $\beta \in \mathbb{R}$ , то для величины

$$E_n(C_{\beta,\infty}^\psi) = \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^\psi} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C$$

наилучшего равномерного приближения класса  $C_{\beta,\infty}^\psi$  тригонометрическими полиномами, порядок которых не превышает  $n - 1$ , имеет место порядковая оценка

$$E_n(C_{\beta,\infty}^\psi) \asymp \psi(n) \quad (9)$$

(запись  $\alpha(n) \asymp \beta(n)$  означает, что существуют константы  $K_1, K_2 > 0$  такие, что  $K_1\beta(n) \leq \alpha(n) \leq K_2\beta(n)$ ). Исходя из теоремы 1 и оценки (9), приходим к следующему утверждению.

**Следствие 1.** Пусть  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $p \leq n$ . Тогда если  $\psi \in F$  и  $p = p(n)$  такова, что  $T(n) \asymp p(n)$ , то

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; U_{n,p}^\psi) \asymp E_n(C_{\beta,\infty}^\psi) \asymp \psi(n),$$

то есть суммы  $U_{n,p}^\psi(f; x)$  реализуют порядок наилучшего равномерного приближения класса  $C_{\beta,\infty}^\psi$ .

При  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow \infty$  и  $T(n) = o(1)p(n)$  равенство (7) дает решение задачи Колмогорова–Никольского для сумм  $U_{n,p}^\psi(f; x)$ , поскольку в этом случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{n,p}^\psi = \lim_{p \rightarrow \infty} \ln p = \infty.$$

Заметим, что на классе  $C_{\beta,\infty}^{\alpha,1}$  при  $p \rightarrow \infty$  и  $n - p \rightarrow \infty$  суммы  $U_{n,p}^\psi(f; x) = U_{n,p}^{\alpha,1}(f; x)$  обеспечивают лучший порядок приближения по сравнению с классическими суммами Валье Пуссена  $V_{n,p}(f; x)$ . Действительно, для сумм  $V_{n,p}(f; x)$  имеет место, в частности, следующее асимптотическое равенство (см., например, [7, с. 130], [9, с. 10])

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{\alpha,1}; V_{n,p}) &= \frac{e^{-\alpha(n-p+1)}}{p} \left( \frac{4}{\pi(1 - e^{-2\alpha})} + \right. \\ &\left. + O(1) \left( \frac{e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^3(n - p + 1)} + \frac{e^{-\alpha p}}{1 - e^{-\alpha}} \right) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $O(1)$  — величина, равномерно ограниченная по  $n, p, \alpha$  и  $\beta$ . Сопоставляя (7) и (10) находим, что если  $p = p(n)$  удовлетворяет условиям

$$p \rightarrow \infty, \quad n - p \rightarrow \infty,$$

то

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow \infty}} \frac{\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{\alpha,1}; U_{n,p}^{\alpha,1})}{\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{\alpha,1}; V_{n,p})} = 0.$$

Как было отмечено ранее, при  $p = 1$  суммы  $U_{n,p}^\psi(f; x)$  совпадают с суммами Фурье  $S_{n-1}(f; x)$  порядка  $n - 1$ . При указанном значении параметра  $p$ , из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

**Следствие 2.** Пусть  $\psi \in F$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; S_{n-1}) = \psi(n) \left( \frac{4}{\pi^2} \ln^+(\eta(\psi; n) - n) + O(1) \right), \quad (11)$$

где  $\ln^+(t) = \max\{\ln t, 0\}$ ,  $\eta(\psi; n) = \psi^{-1}(\frac{1}{2}\psi(n))$ , а  $O(1)$  — величина, равномерно ограниченная по  $\beta$  и  $n$ .

Равенство (11) получено А.И. Степанцом (см., например, [16, с. 257]) и дает решение задачи Колмогорова–Никольского для сумм Фурье в случае, когда при  $n \rightarrow \infty$

$$\eta(\psi; n) - n \rightarrow \infty.$$

При  $\psi(t) = t^{-r}$ ,  $\beta = r$  (в этом случае  $C_{\beta,\infty}^\psi = W_r^r$ ,  $\eta(\psi; n) - n = (2^{1/r} - 1)n$ ) равенство (11), принимает вид

$$\mathcal{E}(W^r; S_{n-1}) = n^{-r} \left( \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1) \right),$$

и установлено А.Н. Колмогоровым [5] (при  $r \in \mathbb{N}$ ) и В.Т. Пинкевичем [6] (при  $r > 0$ ).

Сопоставление следствия 1 с равенством (11) показывает, что в случае, когда  $T(n) \rightarrow \infty$ , а параметр  $p = p(n)$  выбран таким образом, чтобы  $p(n) \asymp T(n)$ , суммы  $U_{n,p}^\psi(f; x)$  осуществляют лучший порядок приближения на классе  $C_{\beta,\infty}^\psi$ , чем суммы Фурье.

Положив в теореме 1  $p = n$  и учитывая, что в этом случае  $U_{n,n}^\psi(f; x)$  — обобщенные суммы Зигмунда  $Z_n^\varphi(f; x)$  ( $\varphi(k) = k/\psi(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ), получаем.

**Следствие 3.** Пусть  $\psi \in F$ ,  $\varphi(k) = k/\psi(k)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; Z_n^\varphi) = \psi(n) \left( \frac{4}{\pi^2} A_n^\psi + O(1) \right), \quad (12)$$

где

$$A_n^\psi = \begin{cases} \ln n, & \text{если } T(n) \leq 1, \\ \ln \frac{n}{T(n)}, & \text{если } 1 \leq T(n) \leq n, \\ \ln \frac{T(n)}{n}, & \text{если } T(n) \geq n, \end{cases}$$

$T(t) = \eta(\psi; t) - t$ ,  $\eta(\psi; n) = \psi^{-1}(\frac{1}{2}\psi(n))$ , а  $O(1)$  — величина, равномерно ограниченная по  $\beta$  и  $n$ .

Поскольку в силу определения (4), для любой функции  $\psi \in \mathfrak{M}_C$

$$T(n) \asymp n$$

и  $\mathfrak{M}_C \subset F$ , то из (12) находим

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; Z_n^\varphi) = O(1)\psi(n), \quad \psi \in \mathfrak{M}_C. \quad (13)$$

Впрочем, эта же оценка вытекает также из следствия [1](#) при  $p = n$ .

Положив в [\(13\)](#)  $\psi(t) = t^{-r}$ ,  $r > 0$  (в этом случае  $C_{\beta,\infty}^\psi = W_{\beta,\infty}^r$  и, соответственно,  $Z_n^\varphi(f; x) = Z_n^s(f; x)$ ,  $s = r + 1$ ), получаем

$$\mathcal{E}(W_{\beta,\infty}^r; Z_n^s) = O(1)n^{-r}. \quad (14)$$

Отметим, что оценка [\(14\)](#) может быть получена из более точных результатов С.А. Теляковского [\[17\]](#) (см. теорему 7).

### 3 Доказательство теоремы [1](#)

Пусть  $f \in C_{\beta,\infty}^\psi$  и  $\psi \in \mathfrak{M}'$ , где

$$\mathfrak{M}' = \left\{ \psi \in \mathfrak{M} : \int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty \right\}$$

(как показано в [\[16, с. 155\]](#),  $F \subset \mathfrak{M}'$ ). Тогда, в силу теоремы 4.1 работы [\[11, с. 71\]](#), в каждой точке  $x \in \mathbb{R}$  для величины

$$\rho_{n,p}(f; x) := f(x) - U_{n,p}^\psi(f; x)$$

имеет место равенство

$$\rho_{n,p}(f; x) = \int_{-\infty}^\infty f_\beta^\psi\left(x + \frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p}(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

где

$$\widehat{\tau}_{n,p}(t) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau_{n,p}(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du,$$

а

$$\tau_{n,p}(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u \leq \frac{n-p}{n}, \\ \psi(n) \frac{nu-n+p}{p}, & \frac{n-p}{n} \leq u \leq 1, \\ \psi(nu), & u \geq 1. \end{cases} \quad (16)$$

Упростим правую часть равенства [\(15\)](#) с целью выделения главного члена величины  $\rho_{n,p}(f; x)$ . С этой целью, положим

$$\widehat{\tau}_{n,p+}(t) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau_{n,p}(u) \cos ut du \quad (17)$$

и

$$\widehat{\tau}_{n,p-}(t) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau_{n,p}(u) \sin ut du. \quad (18)$$

С учетом (17) и (18), равенство (15) можно представить следующим образом

$$\begin{aligned}\rho_{n,p}(f; x) &= \cos \frac{\beta\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(x + \frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) dt - \\ &\quad - \sin \frac{\beta\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(x + \frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p-}(t) dt = \\ &= \cos \frac{\beta\pi}{2} \rho_{n,p+}(f; x) - \sin \frac{\beta\pi}{2} \rho_{n,p-}(f; x).\end{aligned}\quad (19)$$

Поскольку класс  $C_{\beta,\infty}^{\psi}$  инвариантен относительно сдвига аргумента (если  $f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}$ , то и функция  $f_1(\cdot) = f(\cdot + h)$ ,  $h \in \mathbb{R}$ , также принадлежит классу  $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ ), то для величины (6) можно записать

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{\psi}; U_{n,p}^{\psi}) = \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}} |\rho_{n,p}(f; 0)|. \quad (20)$$

Исходя из (20), достаточно ограничиться рассмотрением отклонения  $\rho_{n,p}(f; x)$  в точке  $x = 0$ .

Докажем следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $\psi \in \mathfrak{M}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $p \leq n$  и  $\alpha(n)$  — произвольная последовательность действительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\alpha(n) \geq \frac{K}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $K$  — некоторая положительная константа. Тогда для произвольной функции  $f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}$  при  $n \rightarrow \infty$  имеет место равенство:

$$\rho_{n,p}(f; 0) = (-1)^s \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{\mathcal{I}_{\alpha n}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\sin\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} dt + O(1)r_n, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\alpha n} &= \left(-\frac{n}{p}, -\alpha(n)n\right) \cup \left(\alpha(n)n, \frac{n}{p}\right), \quad \text{если } \alpha(n) \leq \frac{1}{p}, \\ \mathcal{I}_{\alpha n} &= \left(-\alpha(n)n, -\frac{n}{p}\right) \cup \left(\frac{n}{p}, \alpha(n)n\right), \quad \text{если } \frac{1}{p} < \alpha(n) \leq 1, \\ \mathcal{I}_{\alpha n} &= \left(-n, -\frac{n}{p}\right) \cup \left(\frac{n}{p}, n\right), \quad \text{если } \alpha(n) > 1,\end{aligned}$$

$$s = s(\alpha, p) = \begin{cases} 1, & \alpha(n) \leq \frac{1}{p}, \\ 0, & \alpha(n) > \frac{1}{p}, \end{cases} \quad (22)$$

$$r_n = \psi(n) + \int_{1/\alpha(n)}^{\infty} \frac{\psi(t+n)}{t} dt + \int_{\alpha(n)}^{\infty} \frac{\psi(n) - \psi(n+1/t)}{t} dt, \quad (23)$$

а  $O(1)$  — величина, равномерно ограниченная относительно  $\beta$ ,  $n$  и  $p$ .



Перейдем к доказательству леммы.

*Доказательство.* В силу (19), лемма будет доказана, если установить оценки

$$\rho_{n,p+}(f;0) = (-1)^s \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{\mathcal{I}_{\alpha n}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\sin t}{t} dt + O(1)r_n, \quad (24)$$

$$\rho_{n,p-}(f;0) = (-1)^{s+1} \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{\mathcal{I}_{\alpha n}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\cos t}{t} dt + O(1)r_n. \quad (25)$$

Поскольку оценка (25) устанавливается подобно оценке (24), то мы ограничимся лишь доказательством оценки (24).

Предположим, что  $\alpha(n) \leq \frac{1}{p}$ . Представим величину  $\rho_{n,p+}(f;0)$  в виде суммы трех интегралов

$$\begin{aligned} \rho_{n,p+}(f;0) &= \int_{|t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) dt + \\ &+ \int_{\alpha(n)n \leq |t| \leq \frac{n}{p}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) dt + \\ &+ \int_{|t| \geq \frac{n}{p}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) dt. \end{aligned} \quad (26)$$

Используя для  $|t| \leq \alpha(n)n$  представление

$$\widehat{\tau}_{n,p+}(t) = \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{\frac{n-p}{n}}^1 \frac{nu - n + p}{p} \cos ut du + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \psi(nu) \cos ut du, \quad (27)$$

получаемое из (16) и (17), находим

$$\begin{aligned} &\int_{|t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) dt = \\ &= \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{|t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \int_{\frac{n-p}{n}}^1 \frac{nu - n + p}{p} \cos ut du dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \int_1^{\infty} \psi(nu) \cos ut du dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Учитывая включение  $f_{\beta}^{\psi} \in S_{\infty}$ , соотношение

$$\left| \int_{\frac{n-p}{n}}^1 \frac{nu - n + p}{p} \cos ut du \right| \leq \int_{\frac{n-p}{n}}^1 \frac{nu - n + p}{p} du = \frac{p}{2n} \quad (29)$$

и условие  $\alpha(n) \leq 1/p$ , из (28) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{|t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \int_1^{\infty} \psi(nu) \cos ut du dt + O(1)\psi(n). \end{aligned} \quad (30)$$

Как доказано в [16] (см. (11.9) и (11.17)), если  $f_{\beta}^{\psi} \in S_{\infty}$ , то

$$\int_{|t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \int_1^{\infty} \psi(nu) \cos ut du dt = O(1) \left( \psi(n) + \int_{1/\alpha(n)}^{\infty} \frac{\psi(t+n)}{t} dt \right). \quad (31)$$

Таким образом, из (30) находим

$$\int_{|t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) dt = O(1) \left( \psi(n) + \int_{1/\alpha(n)}^{\infty} \frac{\psi(t+n)}{t} dt \right). \quad (32)$$

Перейдем к рассмотрению второго интеграла в правой части (26). Для выделения его главного члена, представим величину  $\widehat{\tau}_{n,p+}(t)$  в виде равенства

$$\widehat{\tau}_{n,p+}(t) = \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{\frac{n-p}{n}}^1 \frac{nu - n + p}{p} \cos ut du - \frac{\psi(n)}{\pi t} \sin t - \frac{n}{\pi t} \int_1^{\infty} \psi'(nu) \sin ut du, \quad (33)$$

получаемого из (27) путем преобразования второго интеграла методом интегрирования по частям:

$$\int_1^{\infty} \psi(nu) \cos ut du = -\frac{\psi(n)}{t} \sin t - \frac{n}{t} \int_1^{\infty} \psi'(nu) \sin ut du. \quad (34)$$

Поскольку, как несложно видеть, исходя из (29),

$$\int_{\alpha(n)n \leq |t| \leq \frac{n}{p}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \int_{\frac{n-p}{n}}^1 \frac{nu - n + p}{p} \cos ut du dt = O(1),$$

то в силу (33),

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha(n)n \leq |t| \leq \frac{n}{p}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) dt = \\ &= -\frac{\psi(n)}{\pi} \int_{\alpha(n)n \leq |t| \leq \frac{n}{p}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\sin t}{t} dt - \end{aligned}$$

$$-\frac{n}{\pi} \int_{\alpha(n)n \leq |t| \leq \frac{n}{p}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{1}{t} \int_1^{\infty} \psi'(nu) \sin ut \, du \, dt + O(1)\psi(n). \quad (35)$$

Перейдем к третьему интегралу в (26). Дважды интегрируя по частям в первом интеграле правой части (33), приходим к равенству

$$\widehat{\tau}_{n,p+}(t) = \frac{\psi(n)}{\pi t^2} \frac{n}{p} \left( \cos t - \cos \frac{n-p}{n} t \right) - \frac{n}{\pi t} \int_1^{\infty} \psi'(nu) \sin ut \, du. \quad (36)$$

Убеждаясь в справедливости оценки

$$\frac{n}{p} \int_{|t| \geq \frac{n}{p}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{1}{t^2} \left( \cos t - \cos \frac{n-p}{n} t \right) dt = O(1), \quad (37)$$

из (36) и (37) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{|t| \geq \frac{n}{p}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) \, dt = \\ & = -\frac{n}{\pi} \int_{|t| \geq \frac{n}{p}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{1}{t} \int_1^{\infty} \psi'(nu) \sin ut \, du \, dt + O(1)\psi(n). \end{aligned} \quad (38)$$

Объединяя (32), (35), (38) и оценку

$$\begin{aligned} & n \int_{|t| \geq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{1}{t} \int_1^{\infty} \psi'(nu) \sin ut \, du \, dt = \\ & = O(1) \int_{\alpha(n)}^{\infty} \frac{\psi(n) - \psi(n+1/t)}{t} dt, \end{aligned} \quad (39)$$

доказанную в [16] (см. (11.31)), из (26) находим

$$\begin{aligned} \rho_{n,p+}(f; 0) &= -\frac{\psi(n)}{\pi} \int_{\alpha(n)n \leq |t| \leq \frac{n}{p}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\sin t}{t} dt + \\ &+ O(1) \left( \psi(n) + \int_{1/\alpha(n)}^{\infty} \frac{\psi(t+n)}{t} dt + \int_{\alpha(n)}^{\infty} \frac{\psi(n) - \psi(n+1/t)}{t} dt \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Рассмотрим случай  $\alpha(n) > \frac{1}{p}$ . Имеет место равенство

$$\rho_{n,p+}(f; 0) = \int_{|t| \leq \frac{n}{p}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) \, dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{n}{p} \leq |t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) dt + \\
& + \int_{|t| \geq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) dt.
\end{aligned} \tag{41}$$

Воспользовавшись представлением (27) и оценкой (29), получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{|t| \leq \frac{n}{p}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) dt = \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq \frac{n}{p}} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \int_1^{\infty} \psi(nu) \cos ut du dt + O(1)\psi(n).
\end{aligned} \tag{42}$$

В силу (34) и (36),

$$\widehat{\tau}_{n,p+}(t) = \frac{\psi(n)}{\pi} \frac{\sin t}{t} + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \psi(nu) \cos ut du + \frac{\psi(n)}{\pi t^2} \frac{n}{p} \left( \cos t - \cos \frac{n-p}{n} t \right). \tag{43}$$

Используя (43) и учитывая, что

$$\begin{aligned}
& \frac{n}{p} \int_{\frac{n}{p} \leq |t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{1}{t^2} \left( \cos t - \cos \frac{n-p}{n} t \right) dt = \\
& = O(1) \frac{n}{p} \int_{\frac{n}{p}}^{\alpha(n)n} \frac{dt}{t^2} = O(1),
\end{aligned}$$

получаем для второго интеграла в (41)

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{n}{p} \leq |t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) dt = \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{\frac{n}{p} \leq |t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\sin t}{t} dt + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{n}{p} \leq |t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \int_1^{\infty} \psi(nu) \cos ut du dt + O(1)\psi(n).
\end{aligned} \tag{44}$$

Для нахождения оценки третьего интеграла в правой части (41), воспользуемся представлением (36). Имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{|t| \geq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{\tau}_{n,p+}(t) dt = \\
& = \frac{\psi(n)}{\pi} \frac{n}{p} \int_{|t| \geq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{1}{t^2} \left( \cos t - \cos \frac{n-p}{n} t \right) dt -
\end{aligned}$$

$$-\frac{n}{\pi} \int_{|t| \geq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{1}{t} \int_1^{\infty} \psi'(nu) \sin ut \, du \, dt. \quad (45)$$

Поскольку, как несложно видеть

$$\frac{n}{p} \int_{|t| \geq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{1}{t^2} \left( \cos t - \cos \frac{n-p}{n} t \right) dt = O(1) \frac{n}{p} \int_{\alpha(n)n}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = O(1),$$

то, в силу (39), из (45) получаем

$$\int_{|t| \geq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \widehat{r}_{n,p+}(t) \, dt = O(1) \left( \psi(n) + \int_{\alpha(n)}^{\infty} \frac{\psi(n) - \psi(n+1/t)}{t} \, dt \right). \quad (46)$$

Объединяя (41), (42), (44), (46) и учитывая (31), приходим к оценке

$$\begin{aligned} \rho_{n,p+}(f; 0) &= \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{\frac{n}{p} \leq |t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\sin t}{t} \, dt + \\ &+ O(1) \left( \psi(n) + \int_{1/\alpha(n)}^{\infty} \frac{\psi(t+n)}{t} \, dt + \int_{\alpha(n)}^{\infty} \frac{\psi(n) - \psi(n+1/t)}{t} \, dt \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Из (40) и (47) следует справедливость (24) при  $\alpha(n) > \frac{1}{p}$ .

Для доказательства леммы в случае, когда  $\alpha(n) > 1$ , достаточно применить к первому интегралу в (47) установленную в работе [10, с. 119] (лемма 5) оценку

$$\left| \int_{|t| \geq \alpha^*(n)} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\sin\left(t + \frac{\gamma\pi}{2}\right)}{t} \, dt \right| = O(1), \quad \varphi \in S_{\infty}, \quad n \rightarrow \infty, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad (48)$$

где  $\{\alpha^*(n)\} = \{\alpha(n) : \alpha(n) \geq n\pi\}$ . Действительно, используя (48), получаем

$$\int_{\frac{n}{p} \leq |t| \leq \alpha(n)n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\sin t}{t} \, dt = \int_{\frac{n}{p} \leq |t| \leq n} f_{\beta}^{\psi}\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\sin t}{t} \, dt + O(1). \quad (49)$$

Из (47) и (49) следует оценка (24) в случае, когда  $\alpha(n) > 1$ . Лемма 1 доказана.  $\square$

Положив в условии леммы 1

$$\alpha(n) = \alpha(\psi; n) = \frac{1}{\eta(\psi; n) - n},$$

где  $\eta(\psi; n)$  определяется формулой (3), а  $\psi \in F$  ( $F \subset \mathfrak{M}'$ ) и учитывая доказанные в работе [16, с. 155, 156] оценки

$$\int_{\eta(\psi; n)}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t - n} \, dt = O(1)\psi(n), \quad \forall \psi \in F,$$

$$\int_n^{\eta(\psi;n)} \frac{\psi(n) - \psi(t)}{t - n} dt = O(1)\psi(n), \quad \forall \psi \in F$$

и

$$\mu(n) = \mu(\psi; n) = \frac{n}{\eta(\psi; n) - n} \geq K > 0, \quad \forall \psi \in F, \quad (50)$$

получаем следующее утверждение.

**Следствие 4.** Пусть  $\psi \in F$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $p \leq n$ . Тогда для произвольной функции  $f \in C_{\beta, \infty}^\psi$  при  $n \rightarrow \infty$  справедливо равенство

$$\rho_{n,p}(f; 0) = (-1)^s \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{\mathcal{I}_n} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\sin\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} dt + O(1)\psi(n), \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n &= \left(-\frac{n}{p}, -\mu(n)\right) \cup \left(\mu(n), \frac{n}{p}\right), \quad \text{если } \mu(n) \leq \frac{n}{p}, \\ \mathcal{I}_n &= \left(-\mu(n), -\frac{n}{p}\right) \cup \left(\frac{n}{p}, \mu(n)\right), \quad \text{если } \frac{n}{p} < \mu(n) \leq n, \\ \mathcal{I}_n &= \left(-n, -\frac{n}{p}\right) \cup \left(\frac{n}{p}, n\right), \quad \text{если } \mu(n) > n, \\ \mu(n) &= \mu(\psi; n) = \frac{n}{\eta(\psi; n) - n}, \\ s &= s(\psi, n, p) = \begin{cases} 1, & \mu(n) \leq \frac{n}{p}, \\ 0, & \mu(n) > \frac{n}{p}, \end{cases} \end{aligned} \quad (52)$$

а  $O(1)$  — величина, равномерно ограниченная по  $\beta$ ,  $n$  и  $p$ .

Далее, положим

$$\begin{aligned} t_k &= (2k + 1 - \beta) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x_k &= t_k + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

и

$$l_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{x_k}, & t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_1 - 1, k_2, k_2 + 1, \dots, k_3 - 1, \\ 0, & t \in (-\infty, t_{k_0}) \cup (t_{k_3}, \infty), \end{cases} \quad (53)$$

где  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  выбраны таким образом, чтобы

$$\begin{aligned} t_{k_0-1} &< -\frac{n}{p} \leq t_{k_0}, \\ t_{k_1} &< -\mu(n) \leq t_{k_1+1}, \\ t_{k_2-1} &< \mu(n) \leq t_{k_2}, \end{aligned}$$

$$t_{k_3} < \frac{n}{p} \leq t_{k_3+1},$$

если  $\mu(n) \leq \frac{n}{p}$ ,

$$t_{k_0-1} < -\mu(n) \leq t_{k_0},$$

$$t_{k_1} < -\frac{n}{p} \leq t_{k_1+1},$$

$$t_{k_2-1} < \frac{n}{p} \leq t_{k_2},$$

$$t_{k_3} < \mu(n) \leq t_{k_3+1},$$

если  $\frac{n}{p} < \mu(n) \leq n$ , и

$$t_{k_0-1} < -n \leq t_{k_0},$$

$$t_{k_1} < -\frac{n}{p} \leq t_{k_1+1},$$

$$t_{k_2-1} < \frac{n}{p} \leq t_{k_2},$$

$$t_{k_3} < n \leq t_{k_3+1},$$

если  $\mu(n) > n$ .

С учетом принятых обозначений, интеграл в правой части равенства (51) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{I}_n} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\sin\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} dt &= \int_{(t_{k_0}, t_{k_1}) \cup (t_{k_2}, t_{k_3})} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right) l_n(t) \sin\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt + \\ &+ R_{n,p}^{(1)} + R_{n,p}^{(2)}, \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$R_{n,p}^{(1)} = \int_{(t_{k_0}, t_{k_1}) \cup (t_{k_2}, t_{k_3})} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right) \left(\frac{1}{t} - l_n(t)\right) \sin\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt, \quad (55)$$

$$R_{n,p}^{(2)} = \left( \int_{-a}^{t_{k_0}} + \int_{t_{k_1}}^{-b} + \int_b^{t_{k_2}} + \int_{t_{k_3}}^a \right) f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\sin\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} dt, \quad (56)$$

$$a = \begin{cases} \frac{n}{p}, & \mu(n) \leq \frac{n}{p}, \\ \mu(n), & \frac{n}{p} < \mu(n) \leq n, \\ n, & \mu(n) > n, \end{cases} \quad (57)$$

$$b = \begin{cases} \mu(n), & \mu(n) \leq \frac{n}{p}, \\ \frac{n}{p}, & \mu(n) > \frac{n}{p}. \end{cases} \quad (58)$$

Покажем, что имеют место оценки

$$R_{n,p}^{(1)} = O(1) \quad (59)$$

и

$$R_{n,p}^{(2)} = O(1). \quad (60)$$

Выполняя элементарные преобразования в (55) и учитывая, что  $|f_\beta^\psi(\cdot)| \leq 1$ , имеем

$$R_{n,p}^{(1)} = O(1) \left( \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{x_k} \right| dt + \sum_{k=k_2}^{k_3-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{x_k} \right| dt \right). \quad (61)$$

Поскольку

$$\int_{t_k}^{x_k} \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{x_k} \right| dt > \int_{x_k}^{t_{k+1}} \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{x_k} \right| dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

то

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{x_k} \right| dt < 2 \int_{t_k}^{x_k} \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{x_k} \right| dt = 2 \int_{t_k}^{x_k} \frac{x_k - t}{|tx_k|} dt \leq \pi \int_{t_k}^{x_k} \frac{dt}{t^2} < \pi \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{t^2}. \quad (62)$$

Объединяя (61) и (62), получаем

$$R_{n,p}^{(1)} = O(1) \left( \int_{t_{k_0}}^{t_{k_1}} \frac{dt}{t^2} + \int_{t_{k_2}}^{t_{k_3}} \frac{dt}{t^2} \right) = O(1) \left( \frac{1}{|t_{k_1}|} + \frac{1}{t_{k_2}} \right) = O(1) \max \left\{ \frac{1}{\mu(n)}, 1 \right\}. \quad (63)$$

Поскольку в силу (50)  $\mu(n)$  ограничена снизу, то из (63) следует оценка (59).

Учитывая соотношения

$$t_{k_0} + a < t_{k_0} - t_{k_0-1} = \pi,$$

$$-b - t_{k_1} \leq t_{k_1+1} - t_{k_1} = \pi,$$

$$t_{k_2} - b < t_{k_2} - t_{k_2-1} = \pi$$

и

$$a - t_{k_3} \leq t_{k_3+1} - t_{k_3} = \pi,$$

после несложных преобразований из (56) находим

$$\begin{aligned} R_{n,p}^{(2)} &= O(1) \left( \frac{t_{k_0} + a}{|t_{k_0}|} + \frac{-b - t_{k_1}}{b} + \frac{t_{k_2} - b}{b} + \frac{a - t_{k_3}}{t_{k_3}} \right) = \\ &= O(1) \left( \frac{1}{|t_{k_0}|} + \frac{1}{b} + \frac{1}{t_{k_3}} \right) = O(1) \max \left\{ \frac{1}{\mu(n)}, 1 \right\} = O(1). \end{aligned}$$

Объединяя (51), (54), (59) и (60), приходим к формуле

$$\begin{aligned} \rho_{n,p}(f; 0) &= (-1)^s \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{(t_{k_0}, t_{k_1}) \cup (t_{k_2}, t_{k_3})} f_\beta^\psi \left( \frac{t}{n} \right) l_n(t) \sin \left( t + \frac{\beta\pi}{2} \right) dt + \\ &+ O(1) \psi(n). \end{aligned} \quad (64)$$



Приступим к нахождению оценки величины  $\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; U_{n,p}^\psi)$ . Подставляя (64) в (20), имеем

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; U_{n,p}^\psi) \leq \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{(t_{k_0}, t_{k_1}) \cup (t_{k_2}, t_{k_3})} \left| l_n(t) \sin \left( t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| dt + O(1)\psi(n). \quad (65)$$

Покажем, что

$$\int_{(t_{k_0}, t_{k_1}) \cup (t_{k_2}, t_{k_3})} \left| l_n(t) \sin \left( t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| dt = \frac{4}{\pi} A_{n,p}^\psi + O(1), \quad (66)$$

где

$$A_{n,p}^\psi = \begin{cases} \ln \frac{n}{p\mu(n)}, & \text{если } \mu(n) \leq \frac{n}{p}, \\ \ln \frac{p\mu(n)}{n}, & \text{если } \frac{n}{p} < \mu(n) \leq n, \\ \ln p, & \text{если } \mu(n) > n. \end{cases} \quad (67)$$

Учитывая центрально-симметричность относительно точки  $x_k$  на  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  функции  $\sin(t + \beta\pi/2)$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \sin \left( t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| dt &= 2 \int_{t_k}^{x_k} \left| \sin \left( t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| dt = \\ &= 2 \int_{(k+\frac{1}{2})\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{(t_{k_0}, t_{k_1}) \cup (t_{k_2}, t_{k_3})} \left| l_n(t) \sin \left( t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| dt &= \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{|x_k|} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \sin \left( t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| dt + \\ &+ \sum_{k=k_2}^{k_3-1} \frac{1}{x_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \sin \left( t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| dt = 2 \left( \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{|x_k|} + \sum_{k=k_2}^{k_3-1} \frac{1}{x_k} \right). \end{aligned} \quad (68)$$

Поскольку

$$t_{k+1} - t_k = \pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

то имеет место равенство

$$\sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{|x_k|} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{|x_k|} dt = -\frac{1}{\pi} \int_{t_{k_0}}^{t_{k_1}} \frac{dt}{t} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( -\frac{1}{x_k} + \frac{1}{t} \right) dt. \quad (69)$$

Используя оценку (62), получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( -\frac{1}{x_k} + \frac{1}{t} \right) dt \right| &\leq \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{x_k} \right| dt < \\ &< \pi \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{t^2} = \pi \int_{t_{k_0}}^{t_{k_1}} \frac{dt}{t^2} < \frac{\pi}{|t_{k_1}|} \leq K \max \left\{ \frac{1}{\mu(n)}, 1 \right\} = O(1). \end{aligned} \quad (70)$$

Сопоставляя (69) и (70), находим

$$\sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{|x_k|} = -\frac{1}{\pi} \int_{t_{k_0}}^{t_{k_1}} \frac{dt}{t} + O(1). \quad (71)$$

Используя обозначения (57) и (58), запишем (71) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{|x_k|} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{-b} \frac{dt}{t} + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{-b} \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi} \int_{t_{k_0}}^{t_{k_1}} \frac{dt}{t} + O(1) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{-b} \frac{dt}{t} + \int_{t_{k_1}}^{-b} \frac{dt}{t} + \int_{-a}^{t_{k_0}} \frac{dt}{t} + O(1). \end{aligned} \quad (72)$$

Поскольку

$$-b - t_{k_1} \leq \pi$$

и

$$t_{k_0} + a < \pi,$$

то

$$\begin{aligned} \int_{t_{k_1}}^{-b} \frac{dt}{t} + \int_{-a}^{t_{k_0}} \frac{dt}{t} &= O(1) \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{|t_{k_0}|} \right) = O(1) \frac{1}{|t_{k_0}|} = \\ &= O(1) \max \left\{ \frac{1}{\mu(n)}, 1 \right\} = O(1). \end{aligned} \quad (73)$$

Объединяя (72) и (73), получаем

$$\sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{|x_k|} = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{-b} \frac{dt}{t} + O(1) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{a}{b} + O(1).$$

Таким образом

$$\sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{|x_k|} = \frac{1}{\pi} A_{n,p}^\psi + O(1), \quad (74)$$

где  $A_{n,p}$  определяется формулой (67).

Аналогичным образом доказывается оценка

$$\sum_{k=k_2}^{k_3-1} \frac{1}{x_k} = \frac{1}{\pi} A_{n,p}^\psi + O(1). \quad (75)$$

Из (68), (74) и (75) следует соотношение (66).

Сопоставляя (65) и (66), находим

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; U_{n,p}^\psi) \leq \psi(n) \left( \frac{4}{\pi^2} A_{n,p}^\psi + O(1) \right). \quad (76)$$

Для окончательного доказательства теоремы остается показать, что в (76) можно поставить знак равенства.

Обозначим через  $\varphi_0(t)$  такую  $2\pi$ -периодическую функцию, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t) dt = 0, \quad |\varphi_0(t)| \leq 1$$

и

$$\varphi_0(t) = \text{sign} \left( l_n(nt) \sin \left( nt + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right), \quad t \in [-1, 1],$$

где  $l_n(t)$  определяется согласно (53). Очевидно, что такая функция существует. Согласно п. 7.2 работы [11, с. 136, 137], в классе  $C_{\beta,\infty}^\psi$ ,  $\psi \in F$  найдется функция  $f_0(t)$ , для которой  $\varphi_0(t)$  будет ее  $(\psi, \beta)$ -производной. Для  $f_0(t)$  из (64) и (66) получаем равенство

$$\begin{aligned} |\rho_{n,p}(f_0; 0)| &= \frac{\psi(n)}{\pi} \left| \int_{(t_{k_0}, t_{k_1}) \cup (t_{k_2}, t_{k_3})} \varphi_0\left(\frac{t}{n}\right) l_n(t) \sin \left( t + \frac{\beta\pi}{2} \right) dt \right| + \\ &+ O(1)\psi(n) = \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{(t_{k_0}, t_{k_1}) \cup (t_{k_2}, t_{k_3})} \left| l_n(t) \sin \left( t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| dt + O(1)\psi(n) = \\ &= \psi(n) \left( \frac{4}{\pi^2} A_{n,p}^\psi + O(1) \right). \end{aligned} \quad (77)$$

Поскольку  $\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; U_{n,p}^\psi) \geq |\rho_{n,p}(f_0, 0)|$ , то из (76) и (77) вытекает справедливость теоремы 1.

## Список литературы

- [1] S. ALJANČIĆ, Classe de saturation du procédé des moyennes typiques de Riesz. Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. **13**(1959), 113–122.
- [2] S. ALJANČIĆ, Approximation of Continuous Functions by Typical Means of Their Fourier Series. Proc. Amer. Math. Soc. **12**:5(1961), 681–688.
- [3] L. FEJÉR, Untersuchungen über Fouriersche Reihen. Math. Ann. **58**:1–2(1903), 51–69.
- [4] V.T. GAVRILYUK, Saturation classes of linear summation methods for Fourier series, Ukr. Math. J. **40**:5(1988), 486–492.
- [5] A. KOLMOGOROFF, Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen. Ann. of Math. **36**:2(1935), 521–526.
- [6] W.T. PINKEWITCH, The order of the remainder in the Fourier series of Weyl-differentiable functions, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 4 (1940), 521–528. (Russian)
- [7] A.S. SERDYUK, Approximation of Poisson integrals by de la Vallée Poussin sums. Ukr. Math. J. **56**(2004), no. 1, 122–134.
- [8] A.S. SERDYUK, IE. YU. OVSII, Approximation of the classes  $C_{\beta}^{\psi} H_{\omega}$  by generalized Zygmund sums, Ukr. Math. J. **61**:4(2009), 627–644.
- [9] A.S. SERDYUK, IE. YU. OVSII AND A. P. MUSIENKO, Approximation of classes of analytic functions by de la Vallée Poussin sums in uniform metric. Rendiconti di Matematica. **32**:1–2(2012), 1–15.
- [10] A.I. STEPANETS, Classification of periodic functions and the rate of convergence of their fourier series. Math. USSR Izv. **28**:1(1987), 99–132; translation from *Math. USSR Izvestiya*. **50**:1(1986), 101–136.
- [11] A.I. STEPANETS, Classification and Approximation of Periodic Functions, Kluwer Academic Publishers, (Dordrecht, 1995).
- [12] A.I. STEPANETS, Approximation properties of the Zygmund method. Ukr. Math. J. **51**:4(1999), 546–576.
- [13] A.I. STEPANETS, Solution of the Kolmogorov–Nikol’skii problem for the Poisson integrals of continuous functions, *Sb. Math.*, **192**:1(2001), 113–139; translation from *Mat. Sbornik*, **192**:1(2001), 113–138.
- [14] A.I. STEPANETS, Approximation of convolution classes by Fourier sums: new results. Ukr. Math. J. **54**:5(2002), 713–740.
- [15] A.I. STEPANETS AND V.I. RUKASOV, Approximate properties of the de la Vallée Poussin method, *Ukr. Math. J.*, **54**:8(2002), 1324–1354.
- [16] A.I. STEPANETS, *Methods of Approximation Theory*. VSP, Leiden, 2005.

- [17] S.A. TELYAKOVSKII, On norms of trigonometric polynomials and approximation of differentiable functions by linear means of their Fourier series. I, *Amer. Math. Soc. Transl.* **28**:2(1963), 283–322; translation from *Trudy Mat. Inst. Steklov* **62**(1961), 61–97.
- [18] CH. LA VALLÉE POUSSIN, Sur la meilleure approximation des fonctions d’une variable réelle par des expressions d’ordre donné. *Comptes rendus de l’Académie des Sciences.* **166**:4(1918), 799–802.
- [19] A. ZYGMUND, The approximation of functions by typical means of their Fourier series. *Duke Math. J.* **12**(1945), 695–704.